



Inženjerska geodezija 2

GEODETSKE MREŽE U INŽENJERSTVU

dr Milutin Pejović, dipl.geod.inž.

mpejovic@grf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

Odsek za geodeziju i geoinformatiku

Beograd, Jul 2025

Šta ćemo učiti?

1. **Uvod - O geodetskim mrežama u inženjerstvu**
2. **Vrste i primeri geodetskih mreža**
3. **Način stabilizacije tačaka geodetskih mreža u inženjerstvu**
4. **Matematičke osnove**
5. **Kratak osvrt na projektovanje geodetskih mreža u inženjerstvu**
6. **Realizacija projekta geodetskih mreža u inženjerstvu**

Deo I: Uvod – o geodetskim mrežama u inženjerstvu

Geodetske mreže u inženjerstvu

1. Geodetska mreža se definiše kao geometrijska konfiguracija tri ili više tačaka na površi Zemlje povezanih geodetskim merenjima.
2. Geodetska mreža – Definiše (MATERIJALIZUJE) koordinatni sistem na gradilištu – omogućava relativno pozicioniranje u koordinatnom sistemu.
3. Geodetske mreže objekata projektuju se i realizuju za potrebe geodetskih radova u inženjerstvu – uslovljene su zahtevima.
4. Državne geodetske mreže svojom lokacijom i načinom stabilizacije tačaka, kao ni tačnošću položaja tačaka mreže ne zadovoljavaju potrebe geodetskih radova u inženjerstvu (ne omogućavaju pozicioniranje sa adekvatnom tačnošću).

Geodetske mreže u inženjerstvu – Čemu služe?

- **Materijalizuje koordinatni sistem na radilištu i da ostvari vezu sa drugim koordinatnim sistemom**
- **Da omogući izvođenje geodetskih radova:**
 - **Geodetsko snimanje**
 - **Obeležavanje geometrije objekta**
 - **Kontrola izvedenih radova (takođe snimanje)**
 - **Osmatranje deformacija (deformaciona merenja)**

Geodetske mreže u inženjerstvu

Geodetske mreže objekata se uspostavljaju iz sledećih razloga:

- 1. neodgovarajući položaji tačka državnih geodetskih mreža (trigonometrijska mreža, poligonska mreža i slično);**
- 2. nedovoljna gustina tačaka državnih geodetskih mreža;**
- 3. neodgovarajuća tačnost položaja tačaka državnih geodetskih mreža;**
- 4. nedostatak potrebne dokumentacije pri izdavanju koordinata tačaka (o epohi nastajanja, načinu izravnjanja mreže, tačnosti koordinata i slično).**

Geodetske mreže u inženjerstvu

Geodetska mreža objekta prvenstveno služi da:

- **definiše matematičku osnovu za prostorno lociranje objekata;**
- **omogući obeležavanje karakterističnih tačaka, linija i površina građevinskih objekata;**
- **omogući kontrolu geometrije u toku gradnje;**
- **omogući osmatranje objekata (mreža se proširuje tačkama van zone očekivanih deformacija i tačkama na objektu čije pomeranje karakteriše pomeranje objekata i tla na kojima se one nalaze).**

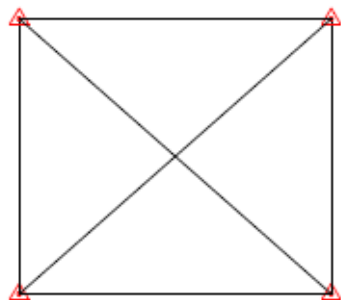
Deo II: Vrste i primeri geodetskih mreža

Podela geodetskih mreža

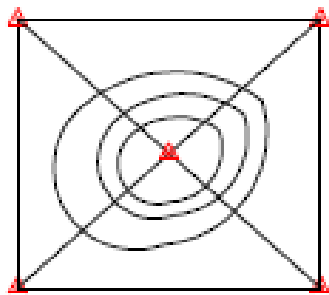
- 1D / 2D / 2D +1D / 3D – prema dimenzionalnosti
- Slobodna / Neslobodna – prema načinu uklapanja u koordinatni sistem.
- Terestričke (totalna stanica, nivelir) / Satelitske (GNSS)
- Osnovna / Kontrolna – po konfiguraciji:
 - osnovna – definiše koordinatni sistem - uključuje samo tačke van objekta,
 - kontrolna uključuje tačke na objektu i najčešće služi monitoringu deformacija.
- Pasivna / Aktivna – po načinu pozicioniranja:
 - pasivne su tradicionalne geodetske mreže,
 - aktivne integrišu merni sistem (servis) u geodetsku mrežu koji omogućava precizno pozicioniranje u realnom vremenu, primer su geodetske mreže permanentnih GNSS stanica.

Konfiguracije geodetskih mreža

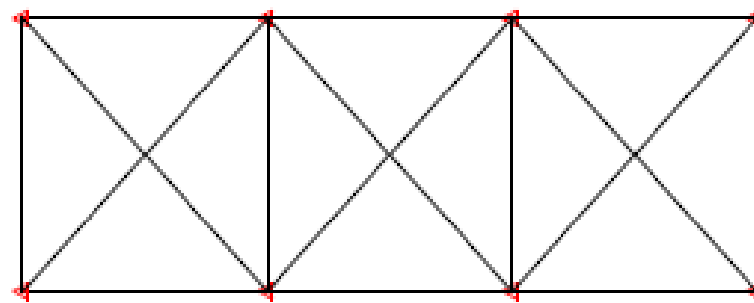
Kod položajnih i prostornih geodetskih mreža razlikujemo nekoliko različitih osnovnih oblika mreža.



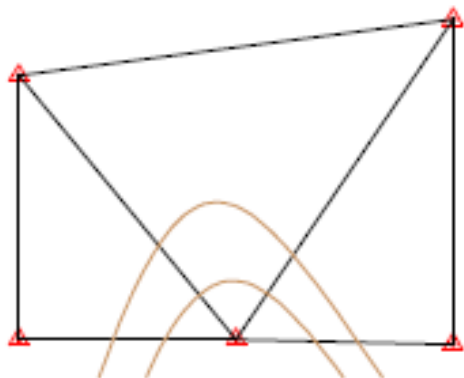
Geodetski četvorougao



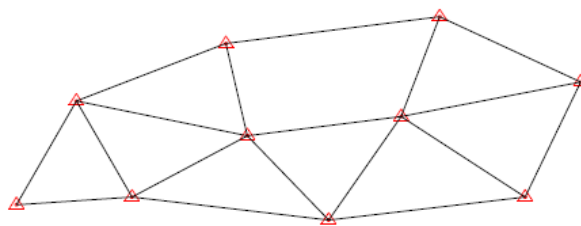
Centralni sistem



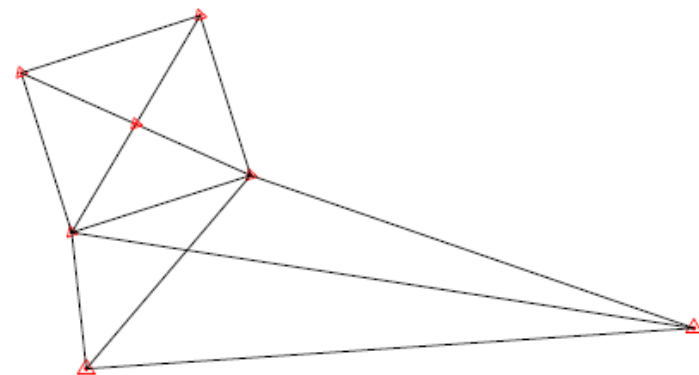
Lanac geodetskih četvorouglova



Lanac geodetskih trouglova



Mreža trouglova

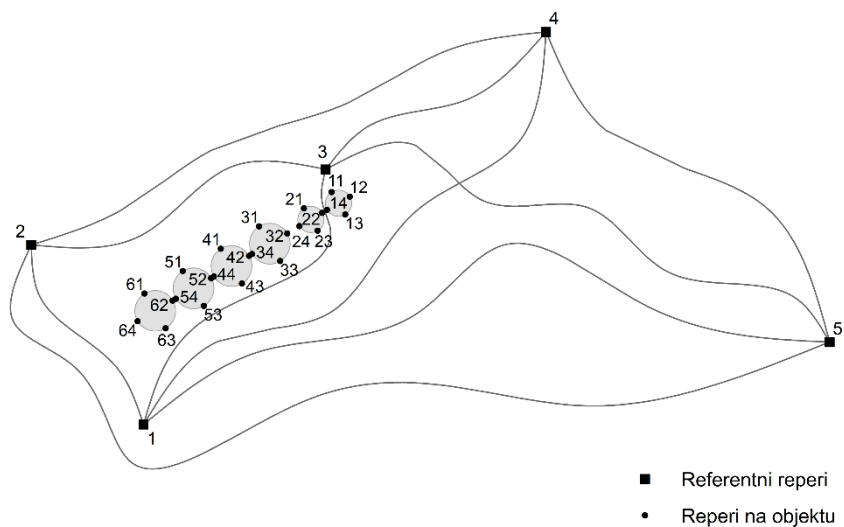


Kombinacija četvorougla i centralnog sistema

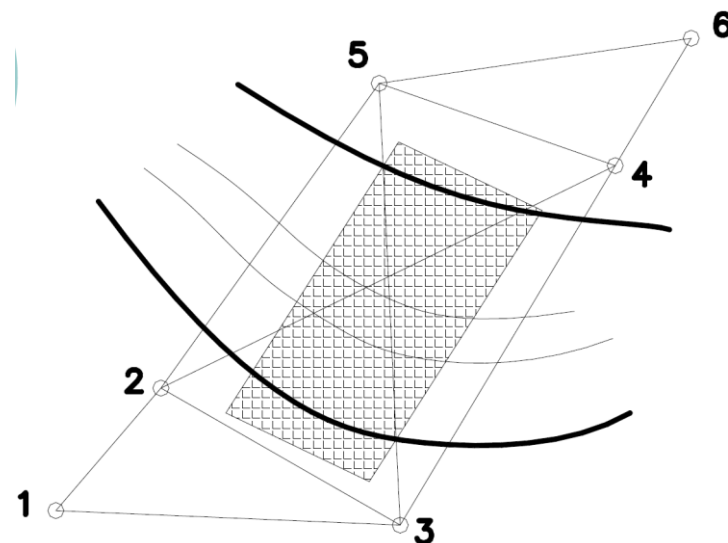
Za koje tipove objekata

- Brane – horizontalna pomeranja – kontinuirani monitoring
- Mostovi i vijadukti – horizontalna i vertikalna pomeranja i ugibi;
- Visoki objekti (zgrade) – osmatranje sleganja
- Visoki objekti (tornjevi i stubovi) – osmatranje vertikalnosti (nagnutosti)
- Tuneli – osmatranje konvergencije tunela
- Putevi – osmatranje klizišta i potpornih zidova

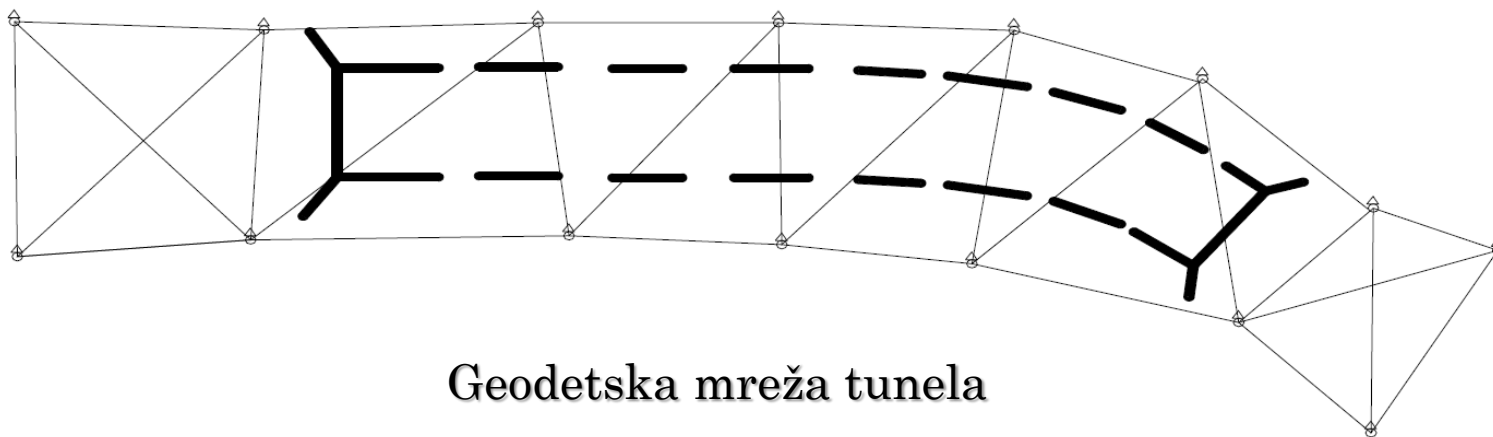
Primeri geodetskih mreža objekata



Geodetska mreža silosa

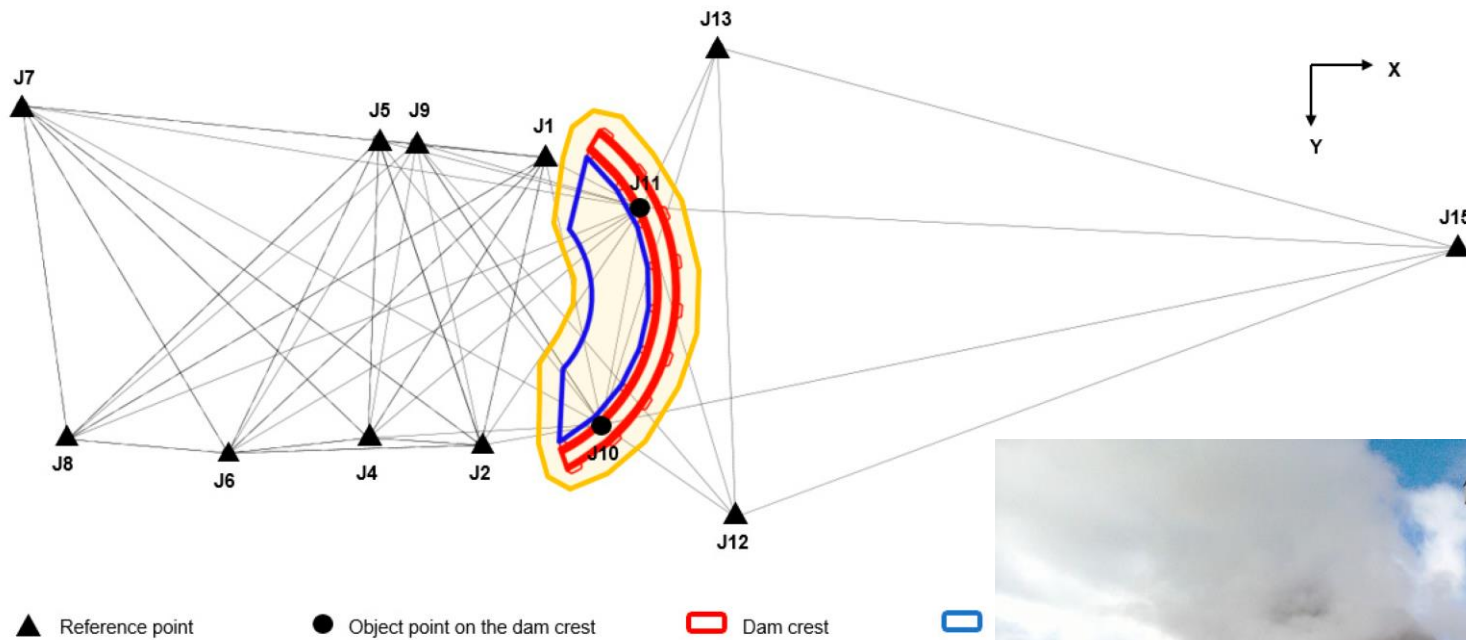


Geodetska mreža mosta

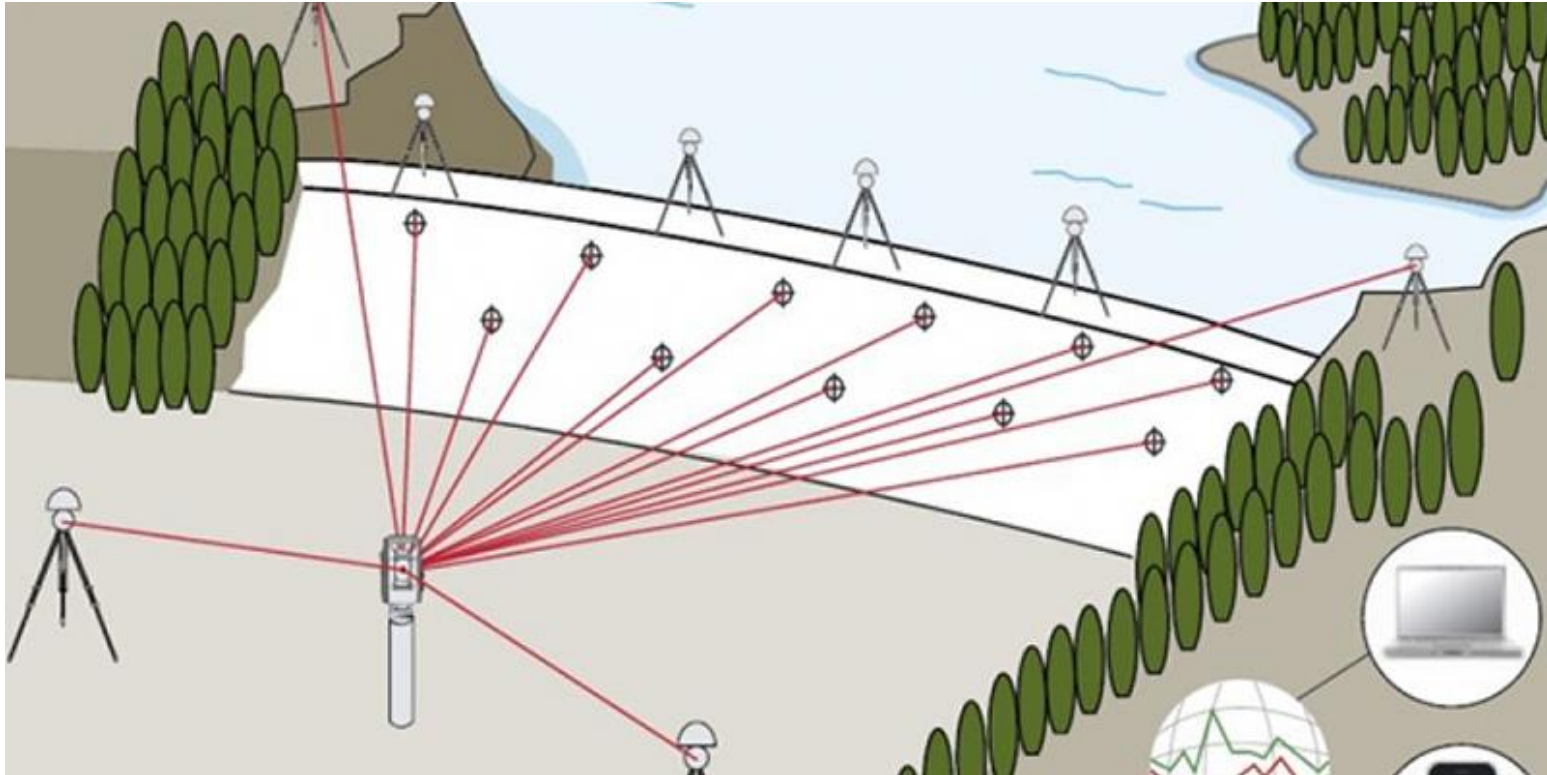


Geodetska mreža tunela

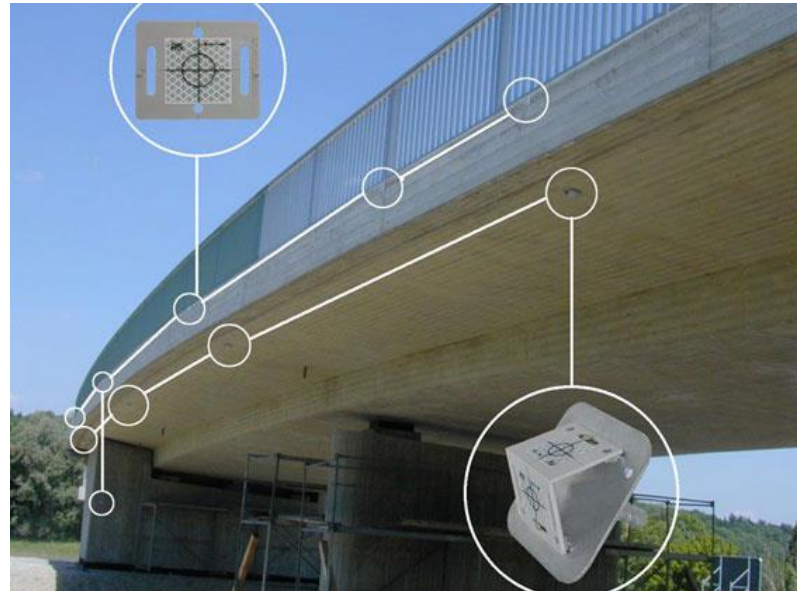
Brane



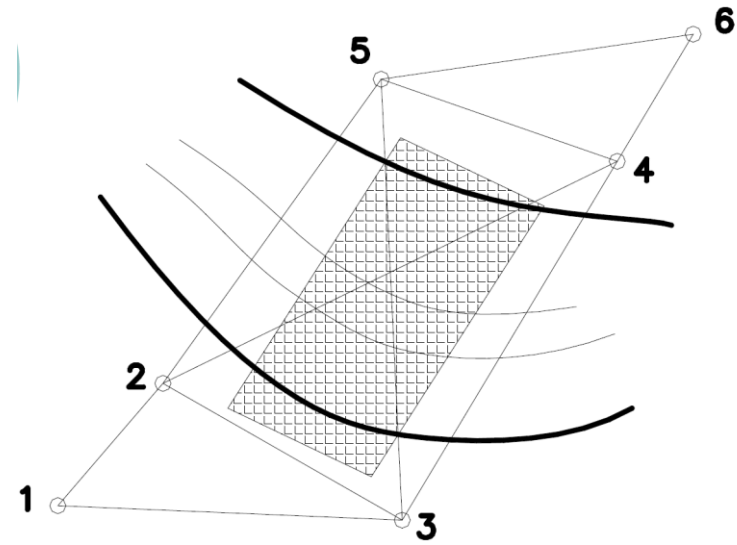
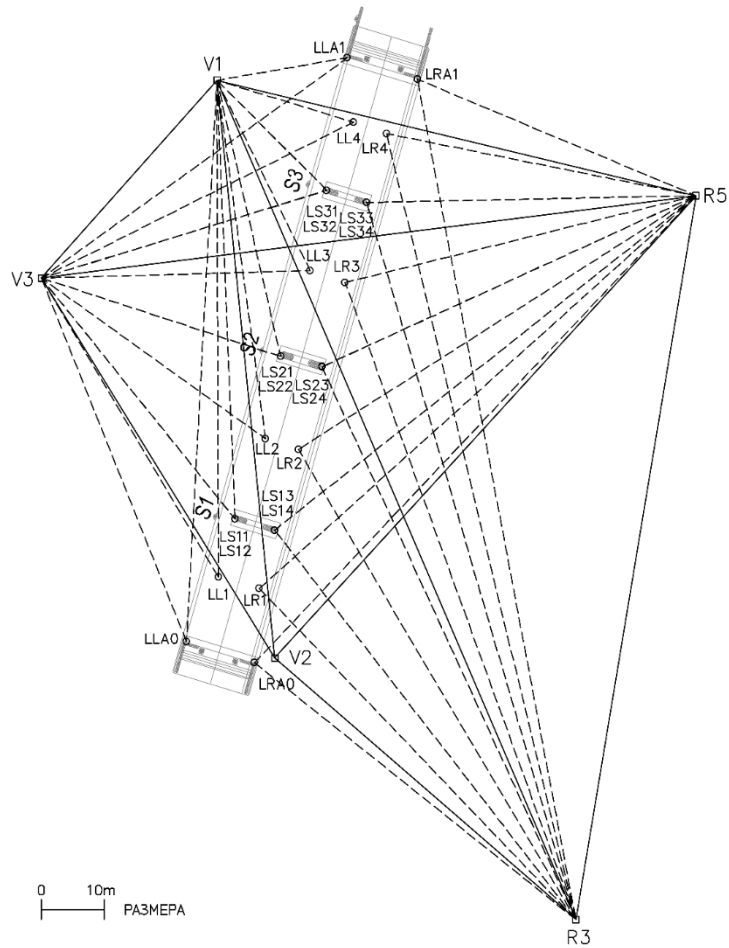
Brane



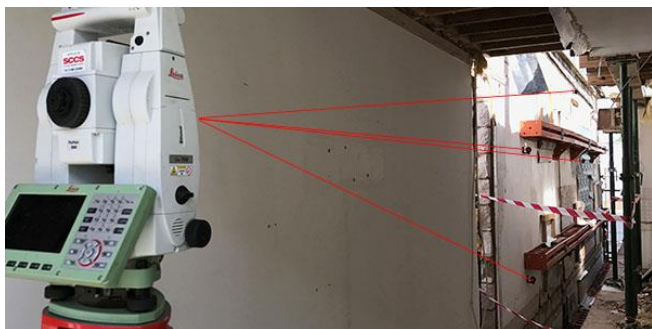
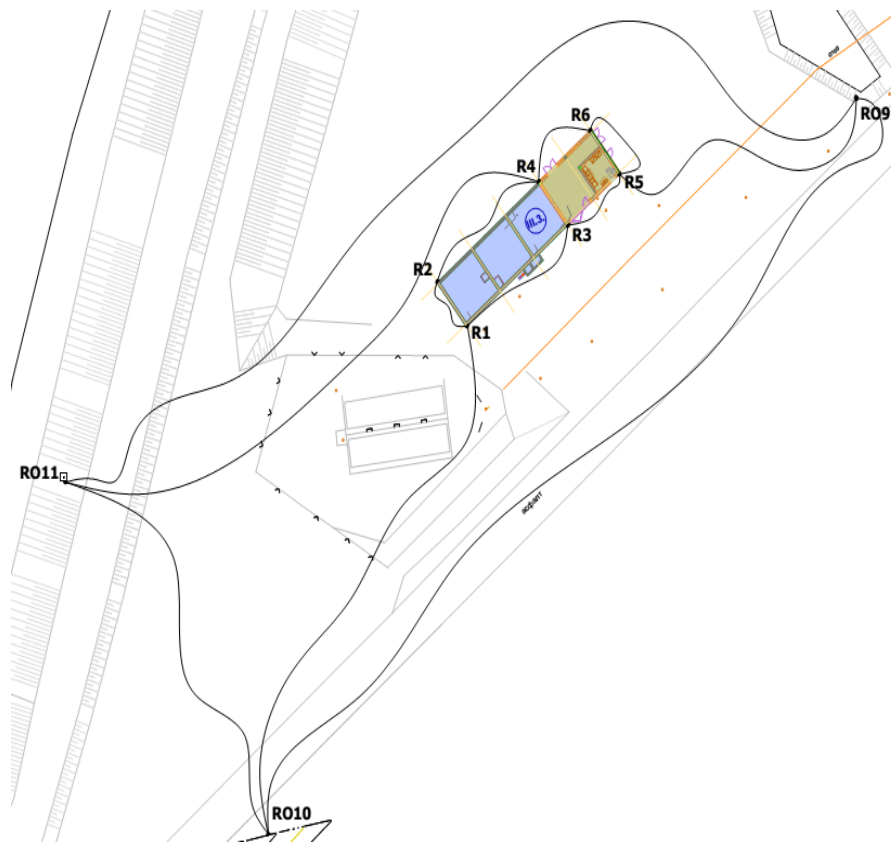
Mostovi



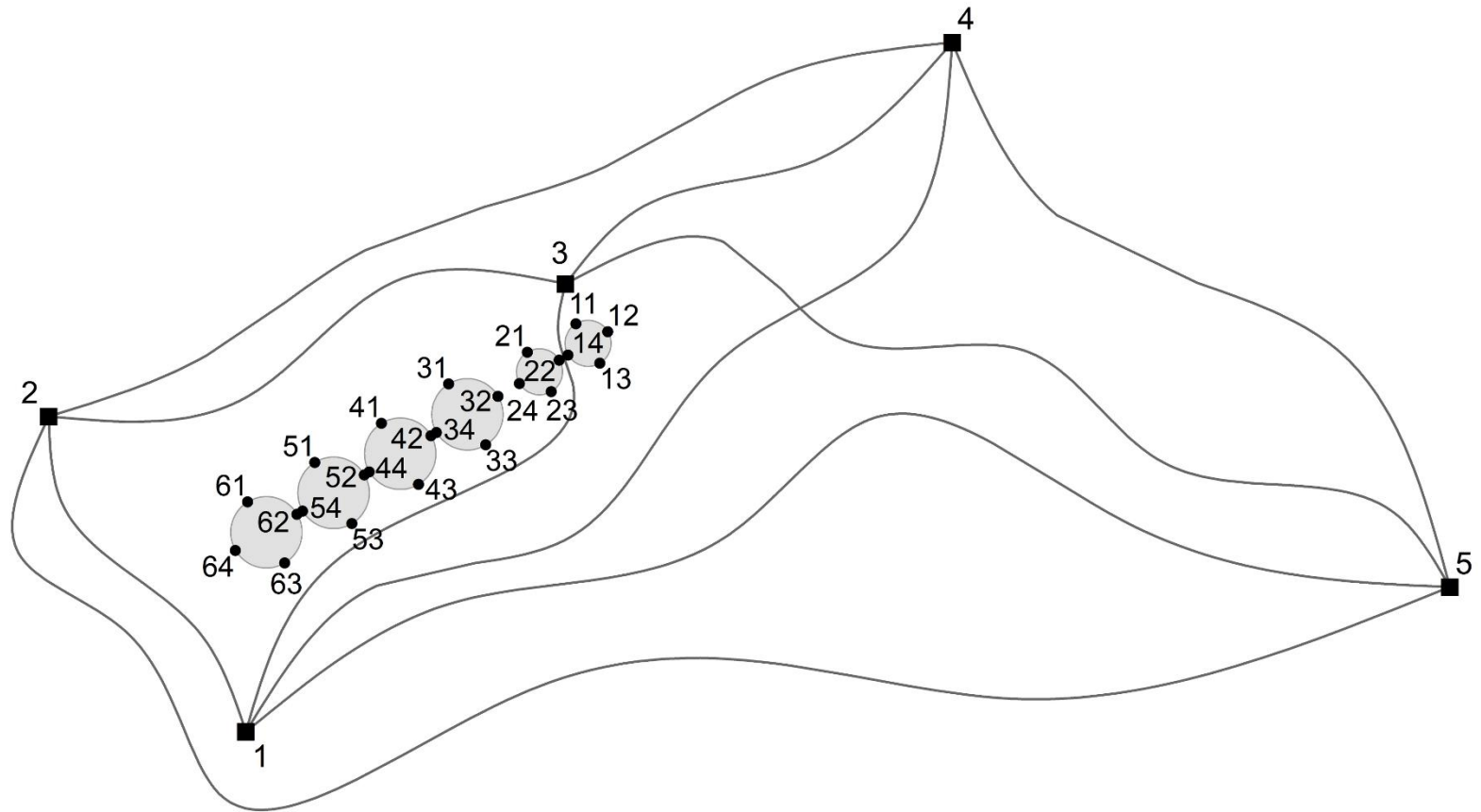
Mostovi



Visoki objekti - zgrade

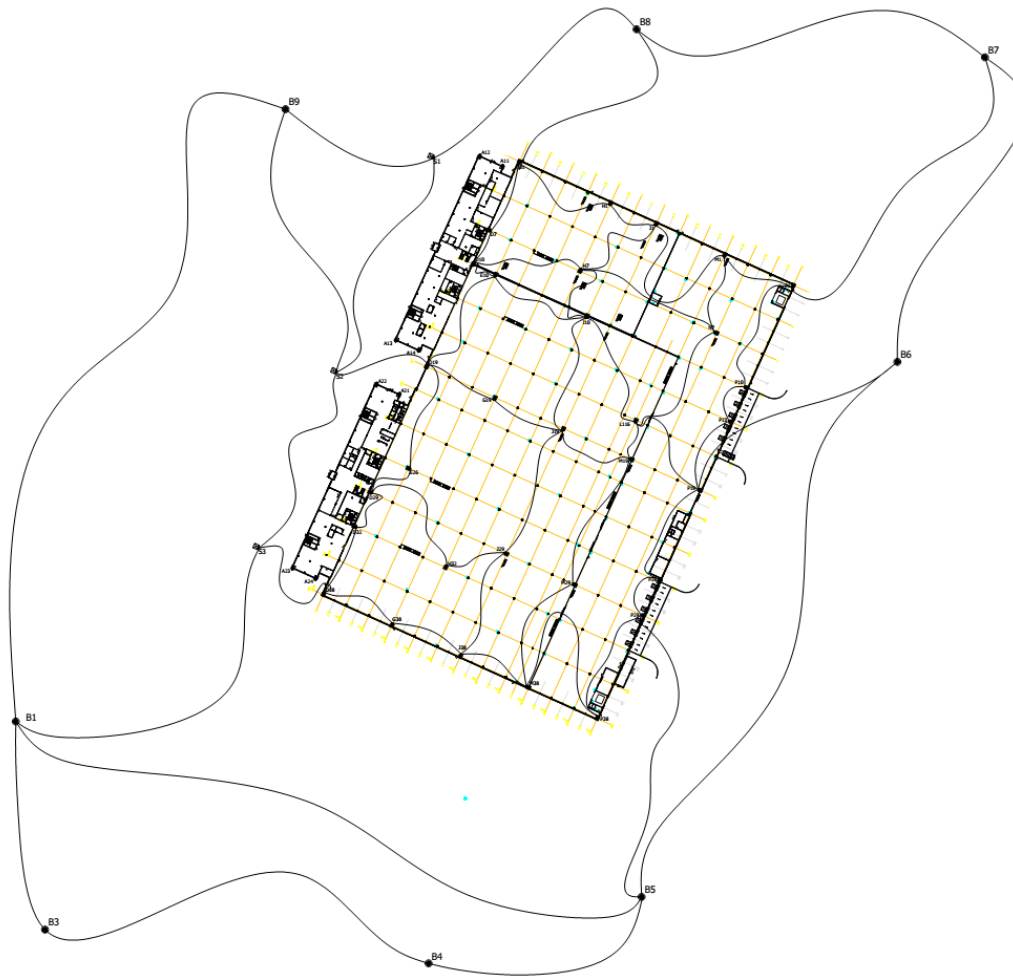


Primer 1D kontrolne geodetske mreže

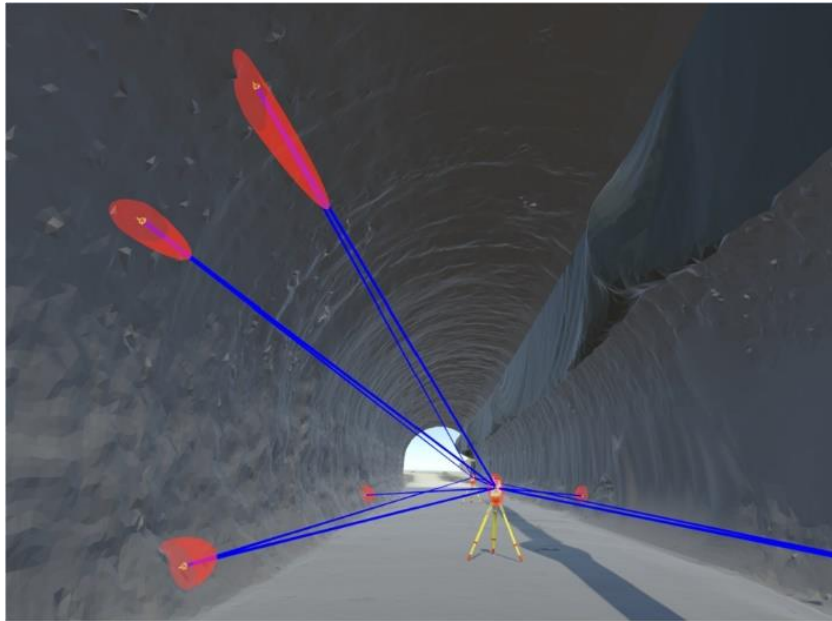
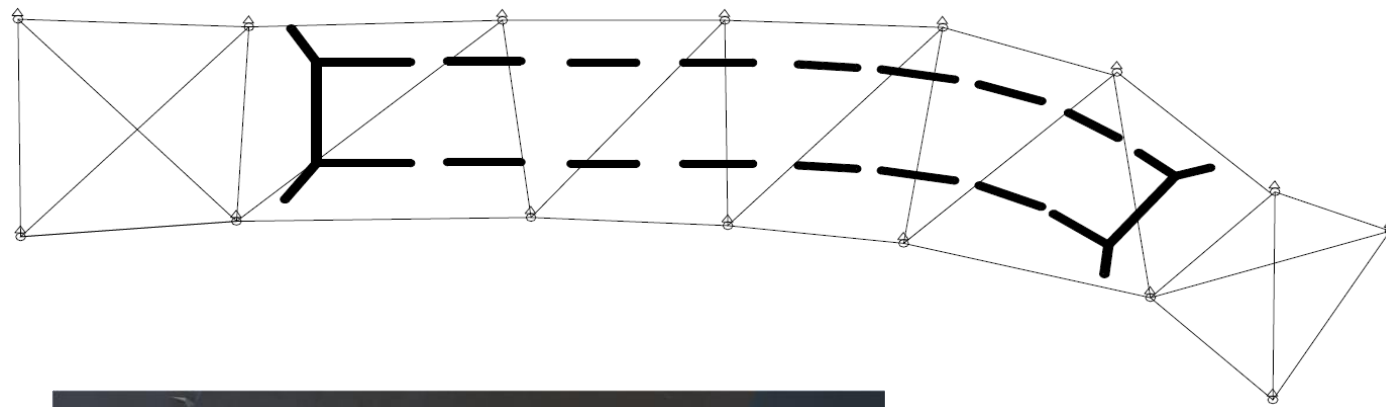


- Referentni reperi
- Reperi na objektu

Primer 1D kontrolne geodetske mreže



Tuneli

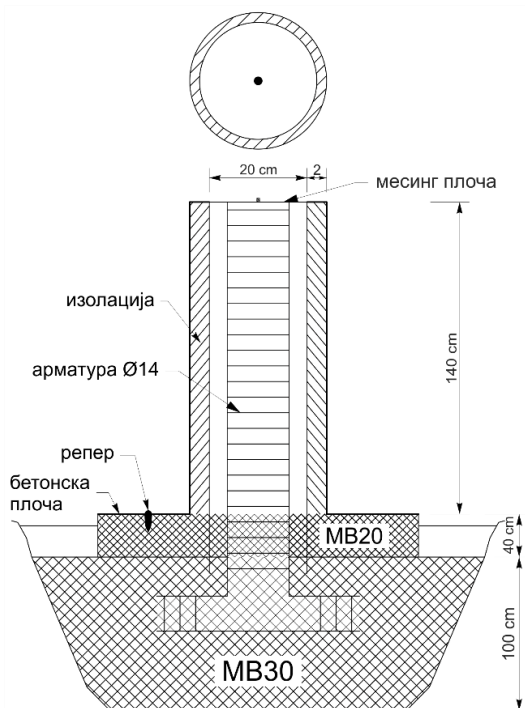


Deo III: Stabilizacija tačaka geodetskih mreža u inženjerstvu

Način stabilizacije tačaka geodetske mreže

- Jedna od najvažnijih osobina mreže je stabilizacija tačaka;
- Izbor položaja tačaka geodetske mreže vrši se na terenu i naziva se rekognosciranje;
- Prilikom izbora položaja tačaka vodi se računa o:
 - Trajnosti tačaka (da ne budu na nestabilnom terenu, da ne budu ugrožene itd.)
 - Načinu kako će biti korišćene (tačke ka kojima će se meriti ili tačke sa kojih će se vršiti merenja);
 - Tehnici merenja (tačke namenjene GNSS tehnologiji moraju imati otvoreno nebo).
 - O načinu pozicioniranja (1D, 2D, 3D)

Način stabilizacije tačaka geodetske mreže



Armirano-betonski stub sa
uređajem za prisilno
centrisanje



Prizma



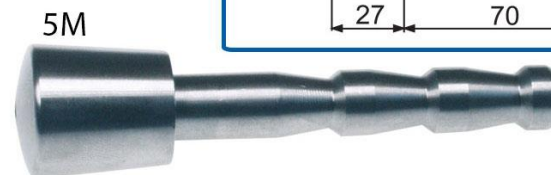
Markica



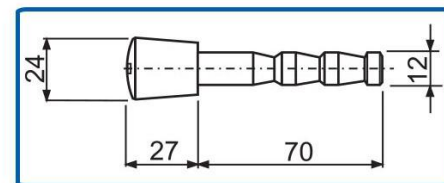
Komplet za prisilno centrisanje



Bolcna



Reper



Način stabilizacije tačaka geodetske mreže



Način stabilizacije tačaka geodetske mreže



Deo IV: Matematičke osnove

Geodetske mreže u inženjerstvu – Matematičke osnove

- **Matematički model**
- **Izravnanje i ocena parametara (MNK)**
- **Datum geodetskih mreža**
- **Statistička testiranja**

Geodetska kontrolna mreža – matematički model

Matematički model predstavlja matematički opis stohastičkih osobina merenja i Njihove veze sa nepoznatim parametrima (koordinatama mreže).

Opšte prihvaćen model geodetskih mreža je **Gaus-Markovljev model**

Gaus-Markovljev model se sastoji iz dva dela:

- Funkcionalni model – kojim je opisana matematička veza između merenih veličina i nepoznatih parametara

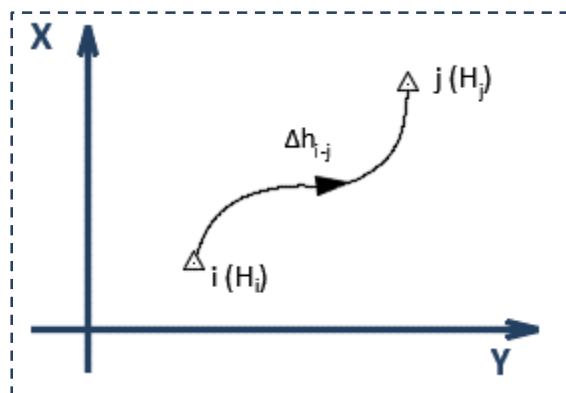
$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{Ax} + \mathbf{l}^0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}, \quad E(\mathbf{f}) = -\mathbf{Ax},$$

- Stohastički model – kojim se opisuju pretpostavke o izvedenim (ili planiranim merenjima) u pogledu njihove preciznosti i međusobne korelisanosti

$$E(\mathbf{vv}^T) = \mathbf{K}_l \Leftrightarrow E(\mathbf{vv}^T) = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_l, \quad E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_l = \mathbf{Q}_l^{-1},$$

Gaus-Markovljev model u 1D kontrolnim mrežama

Funkcionalni model 1D kontrolne mreže:



$$\Delta h_{i-j} + v_i^j = \hat{H}_j - \hat{H}_i = F(\hat{H}_j, \hat{H}_i)$$

Model težina u 1D kontrolnim mrežama

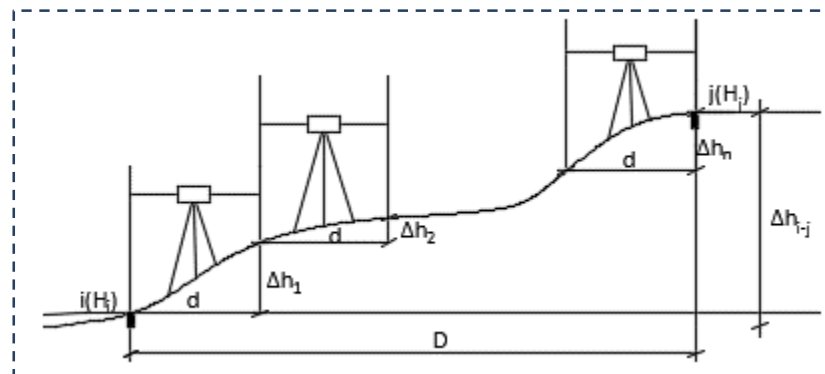
Stohastički model 1D mreže:

$$\Delta h_{i-j} = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \dots + \Delta h_n$$

$$\sigma_{\Delta h_{i-j}}^2 = \sigma_{\Delta h_1}^2 + \sigma_{\Delta h_2}^2 + \dots + \sigma_{\Delta h_n}^2$$

$$\sigma_{\Delta h_{i-j}} = \sqrt{n} \cdot \sigma_{\Delta h} \quad \text{gde je} \quad \sigma_{\Delta h_{i-j}} = \sigma_{li} \quad \text{i} \quad n = \frac{D}{d}$$

$$p_{li} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{li}^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h_{i-j}}^2} = \frac{\sigma_0^2}{n \cdot \sigma_{\Delta h}^2}$$



$$p_{li} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{li}^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h_{i-j}}^2} = \frac{d \sigma_0^2}{D \sigma_{\Delta h}^2} = \frac{k}{D} \quad \text{za} \quad k = \frac{d \sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h}^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{li} = \frac{1}{D}$$

$$p_{li} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{li}^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h_{i-j}}^2} = \frac{\sigma_0^2}{n \cdot \sigma_{\Delta h}^2} = \frac{k}{n} \quad \text{za} \quad k = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta h}^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{li} = \frac{1}{n}$$

Izravnanje GKM - Primena Metode Najmanjih Kvadrata

Rešenje po metodi najmanjih kvadrata, dobija se iz uslova minimizacije sledeće kvadratne forme:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{v} = \min,$$

Iz čega se dobija:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_l \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_l \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{N} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0},$$

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{n} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{n},$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_l \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T,$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{Q}_l - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_l \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T.$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P}_l \mathbf{v}}{f}.$$

Izravnanje GKM - Globalni test adekvatnosti modela

Globalni test je statistički test kojim se proverava statistička adekvatnost funkcionalnog i stohastičkog modela.

$$\begin{array}{l} H_0 : M(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2 \\ H_a : M(\hat{\sigma}_0^2) \neq \sigma_0^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha}(f, \infty)$$

Razloge ne prolaženja testa adekvatnosti modela treba tražiti u:

- Postojanje nemodelovanih sistematskih uticaja (neadekvatnost funkcionalnog modela)
- Postojanje grubih grešaka u merenju
- Neadekvatne pretpostavke o preciznosti merenja (neadekvatnost stohastičkog modela)

Kriterijumi kvaliteta geodetskih mreža

Kriterijumi kvaliteta geodetske mreže su numerički pokazatelji koji proističu iz statističke obrade naših merenja tj. Iz izravnjanja.

Zašto radimo izravnjanje?

- 1. Da bi dobili najbolje moguće ocene koordinata iz naših merenja**
- 2. Da bi dobili ocenu tačnosti (preciznosti / nivo nesigurnosti)**
- 3. Da bi sproveli kontrolu prisustva grešaka u merenjima**

Kriterijumi kvaliteta geodetskih mreža

Apsolutne mere preciznosti:

- Standardne greške položaja tačaka mreže
- Apsolutne elipse grešaka tačaka mreže (Izotropnost i homogenost mreže)

Relativne mere preciznosti:

- Relativne elipse grešaka
- Greške funkcija (dužine ili visinske razlike)

Specifične mere:

- Osetljivost geodetske mreže

Kriterijumi kvaliteta geodetskih mreža

Kriterijumi kvaliteta geodetskih mreža zavise od:

- Dizajna geodetske mreže
- Preciznosti geodetskih merenja
- Uticaja datih veličina

Pokazatelji kvaliteta geodetske mreže

Glavni izvor informacija o preciznosti nepoznatih parametara je kovariaciona matrica nepoznatih parametara $K_{\hat{x}}$:

$$K_{\hat{x}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{x}}$$

Glavni izvor informacija o preciznosti nepoznatih parametara je kovariaciona matrica nepoznatih parametara $K_{\hat{l}}$:

$$K_{\hat{l}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{l}}$$

$$Q_{\hat{l}} = AN^{-}A^T \equiv AN^{+}A^T$$

Од изабраног датума зависе коваријационе матрице оцена координата, док су независне од датума коваријационе матрице оцена поправака и коваријациона матрице оцена мерења.

Pokazatelji kvaliteta geodetske mreže

Pokazatelji kvaliteta (preciznosti) nepoznatih parametara (koordinata) u apsolutnom smislu su standardna odstupanja koordinata:

$$\sigma_{\hat{X}_i} = \sigma_0 \sqrt{Q_{\hat{x}_i \hat{x}_i}}; \quad \sigma_{\hat{Y}_i} = \sigma_0 \sqrt{Q_{\hat{y}_i \hat{y}_i}}; \quad \sigma_{\hat{Z}_i} = \sigma_0 \sqrt{Q_{\hat{z}_i \hat{z}_i}}$$

ili standardno odstupanje položaja tačaka:

$$\sigma_{p_i} = \sqrt{\sigma_{\hat{X}_i}^2 + \sigma_{\hat{Y}_i}^2 + \sigma_{\hat{Z}_i}^2} = \sqrt{\sigma_0^2 (Q_{\hat{x}_i \hat{x}_i} + Q_{\hat{y}_i \hat{y}_i} + Q_{\hat{z}_i \hat{z}_i})}$$

Apsolutne elipse grešaka

Pokazatelji kvaliteta (preciznosti) nepoznatih parametara (koordinata) u apsolutnom smislu su i elipse grešaka ili elipse poverenja. Apsolutne elipse grešaka su prostorni „interval/obuhvat“ koji predstavlja stepen preciznosti (nesigurnosti) ocene koordinata. Računa se tako što se izračunaju velika i mala poluosa, kao i ugao orijentacije elipse:

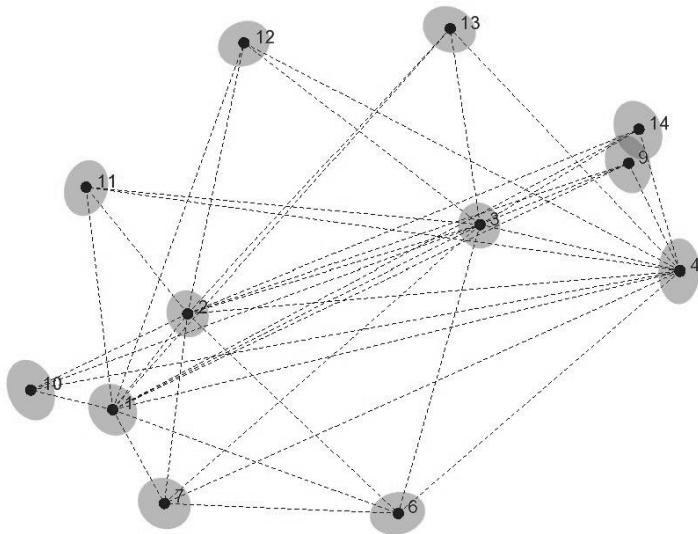
$$A_i = \sqrt{(\lambda_1)_i \cdot F_{1-\alpha;2;f}}; \quad B_i = \sqrt{(\lambda_2)_i \cdot F_{1-\alpha;2;f}}; \quad \theta_i = \arctg \frac{(\lambda_1)_i - K_{\tilde{x}_i \tilde{x}_i}}{K_{\tilde{y}_i \tilde{x}_i}}$$

Koje se dobijaju rešenje sistema:

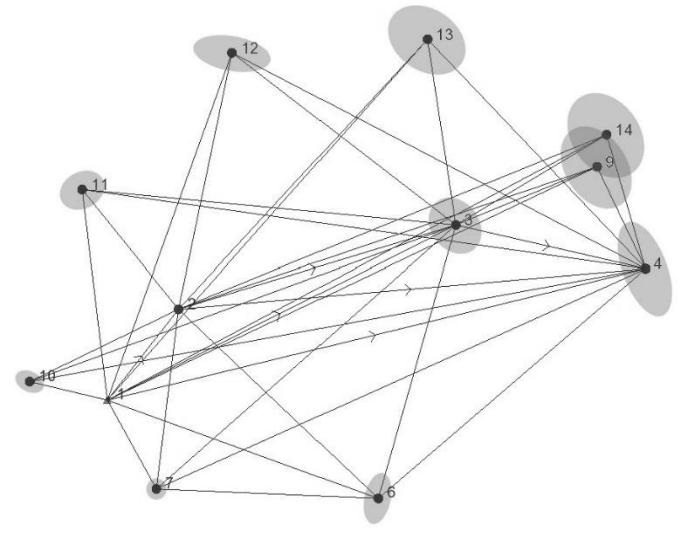
$$\det(K_{\tilde{x}_k} - \lambda E_k) = 0$$

$$(\lambda_{1/2})_i = \frac{1}{2} \left(K_{\hat{y}_i \hat{y}_i} + K_{\hat{x}_i \hat{x}_i} \pm \sqrt{(K_{\hat{x}_i \hat{x}_i} - K_{\hat{y}_i \hat{y}_i})^2 + 4K_{\hat{y}_i \hat{x}_i}^2} \right)$$

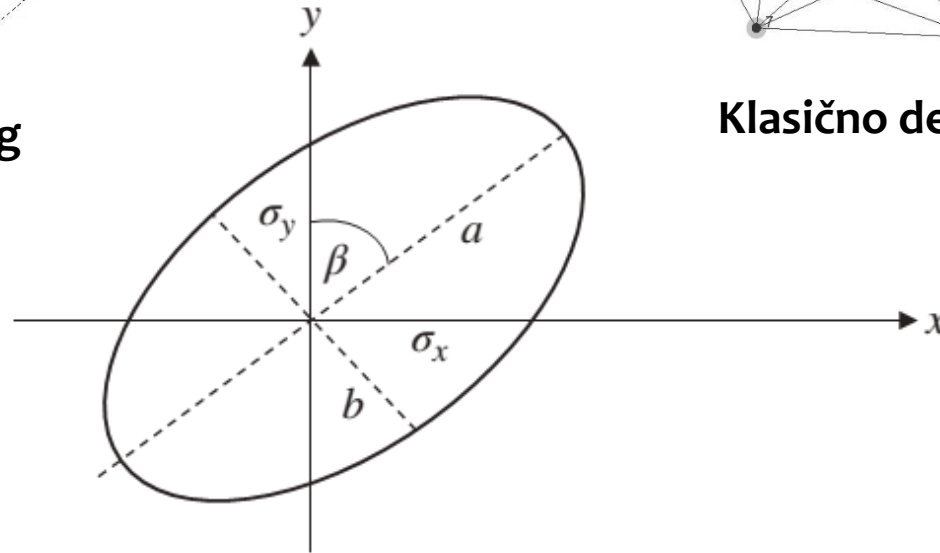
Pokazatelji kvaliteta geodetske mreže



Minimalni trag



Klasično definisan datum



Relativne elipse grešaka

Relativne elipse grešaka je mera preciznosti geodetskih mreža koja ilustruje odnos dve tačke u pogledu preciznosti

Razlike koordinata tačaka dobijenih iz izravnjanja mogu se izraziti kao:

$$\Delta \mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta y_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_j - \hat{x}_i \\ \hat{y}_j - \hat{y}_i \end{pmatrix} = \mathbf{G}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{x}}$$

Sa kovariacionom matricom:

$$\mathbf{K}_{\Delta \mathbf{x}} = \mathbf{G}_{ij} \cdot \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{G}_{ij}^T = s_o^2 \cdot \mathbf{G}_{ij} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{G}_{ij}^T = s_o^2 \cdot \mathbf{Q}_{\Delta \mathbf{x}}$$

$$\mathbf{Q}_{\Delta \mathbf{x}} = \mathbf{G}_{ij} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{G}_{ij}^T = \begin{pmatrix} Q_{\Delta x \Delta x} & Q_{\Delta x \Delta y} \\ Q_{\Delta y \Delta x} & Q_{\Delta y \Delta y} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{\Delta \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} Q_{x_i x_i} + Q_{x_j x_j} - Q_{x_i x_j} - Q_{x_j x_i} & Q_{x_i y_i} + Q_{x_j y_j} - Q_{x_i y_j} - Q_{x_j y_i} \\ Q_{y_i x_i} + Q_{y_j x_j} - Q_{y_i x_j} - Q_{y_j x_i} & Q_{y_i y_i} + Q_{y_j y_j} - Q_{y_i y_j} - Q_{y_j y_i} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \cdots & Q_{x_i x_i} & Q_{x_i y_i} & \cdots & Q_{x_i x_j} & Q_{x_i y_j} & \cdots \\ & Q_{y_i x_i} & Q_{y_i y_i} & & Q_{y_i x_j} & Q_{y_i y_j} \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & Q_{x_j x_i} & Q_{x_j y_i} & & Q_{x_j x_j} & Q_{x_j y_j} \\ \cdots & Q_{y_j x_i} & Q_{y_j y_i} & \cdots & Q_{y_j x_j} & Q_{y_j y_j} & \cdots \\ & \vdots & & & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{I} & \cdots & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & & & i & & j & & u & \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

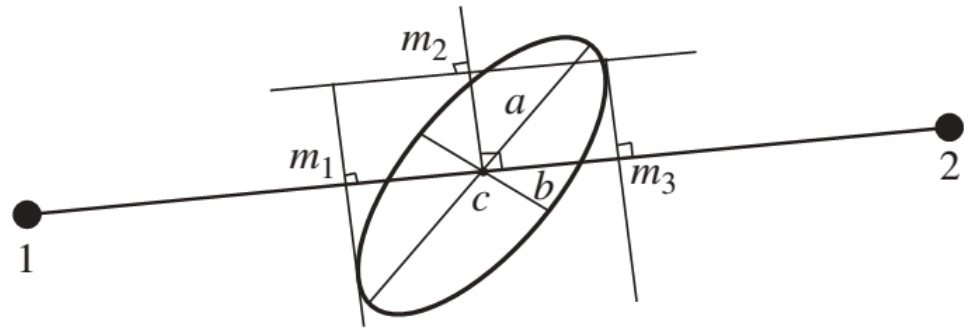
Relativne elipse grešaka

$$A_R = s_o \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(Q_{\Delta x \Delta x} + Q_{\Delta y \Delta y} + k_R)}$$

$$B_R = s_o \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(Q_{\Delta x \Delta x} + Q_{\Delta y \Delta y} - k_R)}$$

$$\theta_R = \frac{1}{2} \arctg \frac{2Q_{\Delta x \Delta y}}{Q_{\Delta x \Delta x} - Q_{\Delta y \Delta y}}$$

$$k_R = \sqrt{(Q_{\Delta x \Delta x} - Q_{\Delta y \Delta y})^2 + 4Q_{\Delta x \Delta y}^2}$$



Pokazatelji osetljivosti geodetske kontrolne mreže

Pokazatelji **osetljivosti** geodetskih mreža su karakteristična mera preciznosti kontrolnih mreža i odnose se na **intenzitet najmanjeg vektora pomeranja** koji se primenom testova podudarnosti mreža **može otkriti** za određeni nivo značajnosti α i moć testa $1-\beta$ (енг. **minimal detectable deformation**).

Ako razliku koordinata i odgovarajuću kofaktorsku matricu razlika predstavimo sa:

$$H_0 : M(\hat{d}) = 0 \quad \text{против} \quad H_a : M(\hat{d}) \neq 0$$

$$\hat{d} = \hat{X}_2 - \hat{X}_1 \quad Q_{\hat{d}} = Q_{\hat{X}_1} + Q_{\hat{X}_2}$$

$$T|_{H_0} = \frac{\hat{d}^T Q_{\hat{d}}^+ \hat{d} / h}{\hat{\sigma}_0^2 / f} \Big|_{H_0} \sim F_{h, f, \lambda}$$

$$f = f_1 + f_2 \quad h = \text{rang}(Q_{\hat{d}})$$

$$T|_{H_0} = \frac{\hat{d}^T Q_{\hat{d}}^+ \hat{d} / h}{\hat{\sigma}_0^2 / f} \Big|_{H_0} \sim F_{h, f, \lambda}$$

$$\lambda = \frac{d^T Q_{\hat{d}}^+ d}{\sigma_0^2} \quad \lambda_0 = f(h, f, \alpha_0, \beta_0)$$

Pokazatelji kvaliteta geodetske mreže

Vektor pomeranja d može se izraziti kao:

$$d = a \cdot g$$

gde a predstavlja intenzitet, a g jedinični vektor.

$$\text{1A: } \lambda = \frac{d_p^2 Q_d^{-1}}{\sigma_0^2} \qquad \text{2A: } \lambda = \frac{d_p^2 [\sin \theta \quad \cos \theta] Q_d^{-1} \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}}{\sigma_0^2}$$

Ako želimo da izračunamo minimalnu vrednost vektora izteziteta koristećemo teorijsku vrednost parametra necentralnosti:

$$a_{\min} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{\lambda_0}{g^T Q_d^+ g}}$$

Pokazatelji kvaliteta geodetske mreže

Граничне вредности параметра нецентралности λ_0 за усвојени ниво значајности $\alpha_0 = 0.05$, моћ теста $1 - \beta_0 = 0.80$ и $1 \leq h \leq 30$, $2 \leq f \leq \infty$ приказане су у табели:

f	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 5$	$h = 10$	$h = 20$	$h = 30$
2	32.0	62.3	92.7	153.4	305.3	608.9	912.4
5	12.4	18.7	24.5	35.7	62.9	116.8	170.5
10	9.7	13.2	16.2	21.7	34.5	59.1	83.4
20	8.7	11.2	13.3	16.8	24.4	38.4	51.9
30	8.4	10.7	12.4	15.4	21.5	32.3	42.5
50	8.2	10.2	11.8	14.3	19.3	27.7	35.2
100	8.0	9.9	11.3	13.6	17.8	24.3	29.9
∞	7.9	9.6	10.9	12.8	16.2	21.0	24.6

Datum geodetske mreže

- **Datum geodetske mreže** određuje **položaj (oblik i veličinu)** geodetske mreže u referentnom koordinatnom sistemu.
- Datum geodetske mreže definiše se **datumskim parametrima** (sedam parametara za 3D geodetsku mrežu: t_x , t_y , t_z , r_x , r_y , r_z i s)
- Neki od parametara mogu se odrediti iz određenog tipa merenja (npr. merenji azimut definiše rotaciju r_z , dok merenja dužina definiše razmeru)
- U slučaju 1D kontrolne mreže, gde su merene visinske razlike, parametar translacije ostaje neodređen.
- Ukoliko se prilikom analize rezultata merenja vrši definisanje nedostajućih datumskih parametara tada govorimo o **slobodnim mrežama**.

Problem datuma geodetske mreže

Problem datuma geodetske mreže prouzrokovao je pojavom linearno zavisnih kolona u matrici dizajna funkcionalnog modela „A“

Tada je $r(A) = r < u$

gde veličina $r(A)$ predstavlja rang funkcionalnog modela, odnosno rang matrica A.

veličina $d=u-r$ predstavlja defekt funkcionalnog modela.

Kada je $d>0$ postoji problem datuma geodetske mreže, odnosno ne postoji jedinstvena matrica N^{-1} (regularna inverzija) koja daje jedinstveno rešenje normalnih jednačina po metodi najmanjih kvadrata $x = N^{-1} \times n$

Problem datuma geodetske mreže

Kod slobodnih geodetskih mreža matrica N je singularna (ne može se sprovesti regularna inverzija).

U tom slučaju govorimo o postupku pseudoinverzije pri iznalaženju rešenja singulariteta matrice N

Za matricu N postoji jedinstvena matrica N^+ za koju važi:

$$AA^+A = A$$

$$A^+AA^+ = A^+$$

$$(A^+A)^T = A^+A$$

$$(AA^+)^T = AA^+$$

pri čemu je $r(A^+) = r(A)$,

koja se naziva **pseudoinverzijom matrice N**

Rešenje problema pseudoinverzije

Najčešći metod rešavanja problema pseudoinverzije je **metod ortogonalnog ovičenja**:

$$N^- = (N + RR^T)^{-1}N(N + RR^T)^{-1} = Q_{\tilde{x}}$$

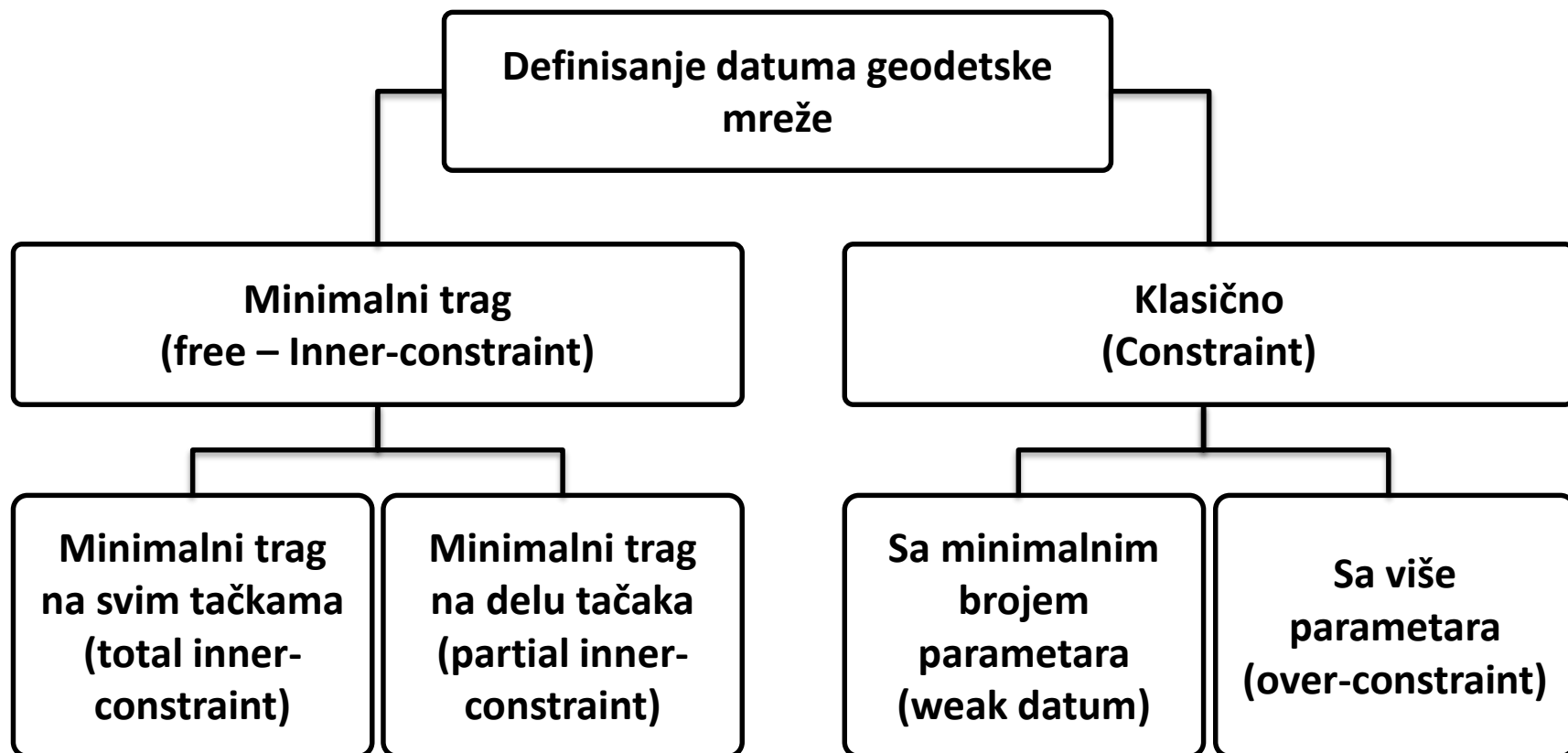
$$(R^-)^T = (N + RR^T)^{-1}R$$

Koja se sprovodi proširenjem matrice N matricom datumskih uslova R:

$$\begin{bmatrix} N & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} N^- & R^{-T} \\ R^- & 0 \end{bmatrix}$$

gde se matrica datumskih uslova može definisati na dva načina:
klasično i minimalnim tragom matrice Q_x

Datum geodetske mreže – Načini definisanja datuma



Datum geodetske mreže

- Nedostatak definicije datuma geodetskih mreža prouzrokuje defekt funkcionalnog modela (nemogućnost rešenja zbog singulariteta matrice normalnih jednačina)
- Defekt funkcionalnog modela određuje minimalni broj datumskih parametara koje je potrebno definisati (kod 1D geodetskih mreža je $d=1$)
- Klasično (Constraint) definisanje datuma podrazumeva fiksiranje određenih parametara (isključivanje iz funkcionalnog modela)
- Definisanje datuma minimalnim tragom podrazumeva uvođenje matrice datumskih uslova, kojim se definišu parametri datuma i minimizira trag matrice Qx (za tačke koje učestvuju u definisanju datuma).

Uticaj datuma na analizu geodetskih mreža

- Ocena nepoznatih parametara i pripadajuće kovariacione matrice je zavisna od datuma.
- Kod datuma definisanog minimalnim tragom, geometrija mreže ostaje nepromenjena
- Klasično definisan datum (u over-constraint slučaju) utiče na izmenu geometrije mreže, u zavisnosti od kvaliteta međusobnih odnosa tačaka.
- ➡ **Ocene deformacija su izrazito zavisne od izbora datuma!**

Parametri datuma definisani merenjima

Врсте опажања	Параметри датума						
	Транслације			Ротације			Размера
	t_x	t_y	t_z	r_x	r_y	r_z	s
Дужине	×	×	×	×	×	×	✓
Хоризонтални правци	×	×	×	×	×	×	×
Хоризонтални углови	×	×	×	×	×	×	×
Азимути	×	×	×	×	×	✓	×
Зенитна одстојања	×	×	×	✓	✓	×	×
GNSS 2D вектори	×	×	×	×	×	✓	✓
GNSS 3D вектори	×	×	×	✓	✓	✓	✓
Висинске разлике	×	×	×	✓	✓	×	✓

Klasično definisan datum

Na primeru trodimenzionalne mreže u kojoj su mereni horizontalni pravci, zenitna odstojanja i kose dužine, ostaje 4 nedefinisana datumska parametra: translacije duž koordinatnih osa i rotacija oko Z ose.

Translacija se definiše fiksiranjem koordinata jedne tačke (tačke 1), dok se rotacija oko Z ose definiše fiksiranjem x koordinate druge tačke (tačke 2):

$$\Delta x_1 = 0, \quad \Delta y_1 = 0, \quad \Delta z_1 = 0, \quad \Delta x_2 = 0,$$

Matrično napisano, datumski uslovi se mogu napisati na sledeći način

$$B^T X = 0 \quad \text{gde je: } B^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & X_2 & Y_2 & Z_2 & & X_m & Y_m & Z_m & z_1 & \dots & z_p \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Klasično definisan datum

Kada se datumska ograničenje uvedu u funkcionalni model, dobija se:

$$V = Ax + f$$

$$B^T x = 0$$

što se može predstaviti u matričnom obliku kao:

$$\begin{bmatrix} N & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Iz proširene matrice normalnih jednačina, primenom regularne inverzije dobija se:

$$N^- = Q_{\tilde{x}} = \left(N + BB^T \right)^{-1} N \left(N + BB^T \right)^{-1}$$

Datum definisan minimalnim tragom matrice Q_x

Trag matrice Q_x predstavlja sumu elemenata na dijagonali koji predstavljaju skalirane vrednosti varijansi nepoznatih parametara.

U formi rešenja ortogonalnim ovičenjem uslov minimizacije traga matrice Q_x može se napisati kao:

$$tr Q_{\hat{x}} = tr \left(N + RR^T \right)^{-1} N \left(N + RR^T \right)^{-1} = \min$$

Datum definisan minimalnim tragom matrice Q_x

U slučaju razmatranja 3D mreža, sedam parametara je potrebno odrediti da bi se definisao datum, a karakteristike datumskog rešenja minimalnim tragom kovarijacione matrice na sve tačke mreže, zasnivaju se na sledećem:

- **težište ostaje nepromenjeno** (definisanje translacija po sve tri ose – poziciona ograničenja);
- **prosečna orijentacija (direkcionu ugao) od težišta do svih tačaka ostaje nepromenjena** (definisanje rotacija po sve tri ose);
- **prosečno rastojanje od težišta do svih tačaka ostaje nepromenjeno** (jedan faktor razmere).

Minimanli broj ograničenja (inner-constrained)

U slučaju razmatranja 3D mreža, sedam parametara je potrebno odrediti da bi se definisao datum, a karakteristike datumskog rešenja minimalnim tragom kovarijacione matrice na sve tačke mreže, zasnivaju se na sledećem:

- **težište ostaje nepromenjeno** (definisanje translacija po sve tri ose – poziciona ograničenja);
- **prosečna orijentacija (direkcionu ugao) od težišta do svih tačaka ostaje nepromenjena** (definisanje rotacija po sve tri ose);
- **prosečno rastojanje od težišta do svih tačaka ostaje nepromenjeno** (jedan faktor razmere).

Ograničenja nepomerenosti težišta

Ako težište mreže možemo zapisati kao:

$$X_G = \sum_i \left(\frac{X_i}{m} \right); Y_G = \sum_i \left(\frac{Y_i}{m} \right); Z_G = \sum_i \left(\frac{Z_i}{m} \right)$$

Uslov nepomerenosti težišta nam daje:

$$dX_G = dY_G = dZ_G = 0$$



$$\sum_i dX_i = 0; \sum_i dY_i = 0; \sum_i dZ_i = 0.$$

Ograničenja nepromenjenosti orijentacije

Datumska ograničenja rotacije po sve tri ose uvode se sa uslovom da je prosečna orijentacija (direkcionni ugao) od težišta do svih tačaka nepromenjen.

Ako orijentaciju od težišta G do proizvoljne tačke P projektuje na ravan XY u cilju definisanja rotacije oko Z ose, dobija se:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{X_i - X_G}{Y_i - Y_G} = f(X_i, Y_i, X_G, Y_G)$$

Uz uslov da je $\sum_i d\theta_i = 0$ dobija se $\sum_i (Y_i dX_i - X_i dY_i) = 0$

Na isti način dolazi se do datumskih ograničenja u pogledu rotacije oko osa X i Y:

$$\begin{aligned} \sum_i (Z_i dY_i - Y_i dZ_i) &= 0 \\ \sum_i (Z_i dX_i - X_i dZ_i) &= 0 \end{aligned}$$

Ograničenje razmere

Rastojanje od težišta G do bilo koje tačke mreže P, može se napisati kao:

$$r^2 = (X_i - X_G)^2 + (Y_i - Y_G)^2 + (Z_i - Z_G)^2$$

Iz čega diferenciranjem sledi:

$$dr = \frac{1}{r} \left[(X_i - X_G) dX_i + (Y_i - Y_G) dY_i + (Z_i - Z_G) dZ_i \right]$$

Ako uvedemo uslov nepromenjenosti razmere: $\sum_i dr_i = 0$

Može se izvesti datumsko ograničenje:

$$\sum_i (X_i dX_i + Y_i dY_i + Z_i dZ_i) = 0$$

Objedinjavanje datumskih uslova u matrični oblik

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & Z_1 & -Y_1 & 0 & Z_2 & -Y_2 & \dots & 0 & Z_m & -Y_m \\ Z_1 & 0 & -X_1 & Z_2 & 0 & -X_2 & \dots & Z_m & 0 & -X_m \\ Y_1 & -X_1 & 0 & Y_2 & -X_2 & 0 & \dots & Y_m & -X_m & 0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & X_2 & Y_2 & Z_2 & \dots & X_m & Y_m & Z_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ dY_1 \\ dZ_1 \\ dX_2 \\ dY_2 \\ dZ_2 \\ \dots \\ dX_m \\ dY_m \\ dZ_m \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix} V = Ax + f \\ G^T x = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} N & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad N^+ = Q_{\hat{x}} = \left(N + GG^T \right)^{-1} N \left(N + GG^T \right)^{-1}$$

Deo V: Kratak osvrt na projektovane geodetskih mreža u inženjerstvu

Šta obuhvata projektovanje kontrolne mreže?

Projektovanje geodetskog osmatranja objekata obuhvata:

- **Formiranje geodetske kontrolne mreže (modeliranje objekata)**
- **Kreiranje plana merenja**
- **Proračun kriterijuma kvaliteta geodetske kontrolne mreže**
- **Razrada metode merenja**
- **Definisanje tehničkih uslova (izbor instrumenata i uslova pri merenju)**

Šta obuhvata projektovanje kontrolne mreže?

Projektovanje se radi u cilju:

- **Postizanja definisanih kriterijuma kvaliteta**
- **Kreiranja pouzdanog matematičkog modela**
- **Kreiranja optimalnog rešenja u pogledu efikasnosti i ekonomičnosti**
- **Ostvarivanja mogućnosti kontinuiteta osmatranja**

Deo VI: Ralizacija projekta geodetskih mreža

Šta obuhvata realizacija projekta geodetske mreže?

- Realizacija projekta geodetske mreže objekta podrazumeva sledeće radove:

- testiranje tačaka postojećih mreža;
- ocena stanja stabilizacije tačaka postojećih mreža;
- prestabilizacija tačaka postojećih mreža;
- rekognosciranje – odabir najpovoljnijeg položaja tačaka na terenu;

- stabilizacija i signalizacija tačaka geodetske mreže objekta;
- realizaciju merenja u geodetskoj mreži objekta;
- analiza rezultata merenja;
- izravnanje i ocena tačnosti merenja;
- izrada numeričkih, grafičkih i tabelarnih priloga.

Elaborat o realizaciji geodetske mreže?

- Nakon realizacije terenskih merenja i obrade rezultata merenja, izrađuje se odgovarajući elaborat o realizaciji projekta geodetske mreže objekta u kojem su dati dokazi da je projektovana mreža realizovana sa zadovoljavajućom tačnošću.
- Elaborat o realizaciji projekta geodetske mreže objekta sastoji se od:
 - tehničkog izveštaja;
 - numeričkih i grafičkih priloga.
- Primer projekta geodetske mreže objekta i elaborata o realizaciji projekta geodetske mreže objekta.

Elaborat o realizaciji geodetske mreže?

- **Elaborat o realizaciji geodetskih radova u inženjerstvu u tehničkom smislu treba da sadrži:**
 - **Opis radova (predmet, osnov za realizaciju itd.)**
 - **Realizacija merenja (opis merne kampanje)**
 - **Analiza i obrada rezultata merenja (opis analize podataka, preliminarna analiza, izravnanje itd.)**
 - **Rezultati obrade podataka i prezentacija.**
 - **Zaključak (sumarni pregled podataka)**

Elaborat o realizaciji geodetske mreže?

Elaborat o realizaciji geodetskih radova u inženjerstvu u formalnom smislu treba da sadrži:

- Opštu dokumentaciju (administrativni dokumenti, licence firme i izvođača)
- Tekstualni deo (Tehnički izveštaj)
 1. Opis radova (predmet, osnov za realizaciju itd.)
 2. Realizacija merenja (opis merne kampanje)
 3. Analiza i obrada rezultata merenja (opis analize podataka, preliminarna analiza, izravnanje itd.)
 4. Rezultati obrade podataka i prezentacija.
 5. Zaključak (sumarni pregled rezultata)
- Prilozi (Grafički i numerički)